

## Anexo 4: Cálculo y dimensionamiento de ejes

A continuación se presentan los cálculos de los cuatro ejes del sistema.

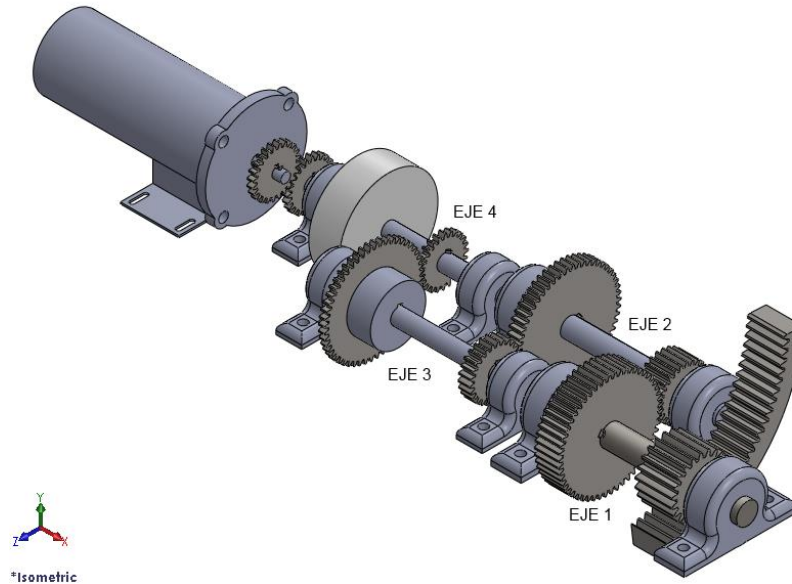


Figura A4.1: Vista isométrica de los ejes del sistema. Fuente: Elaboración propia.

### Cálculo del eje 1

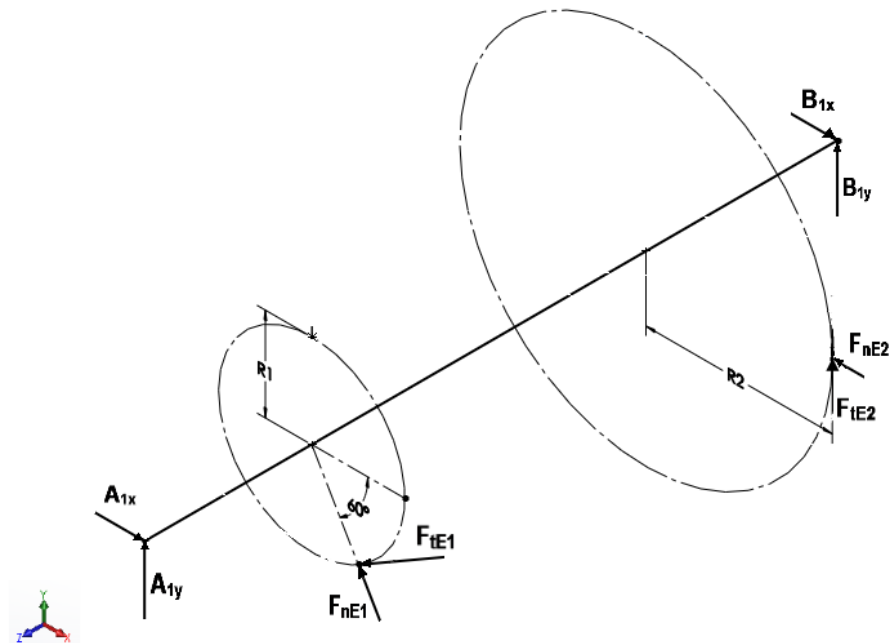


Figura A4.2: Vista isométrica del eje 1 y las cargas presentes. Los valores de  $R_1$  y  $R_2$  corresponden a los radios de los engranajes E1 y E2 calculados en el Anexo 2. Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan los cálculos para hallar la fuerza cortante, momento flector y momento torsor del eje 1.

$$\sum F_x = 0$$

$$A_{1x} + B_{1x} - F_{nE2} - F_{tE1} \cos(30) - F_{nE1} \cos(60) = 0 \quad (A4.1)$$

Donde:

$F_{tE1}$ : Fuerza tangencial del engranaje 1 = 14715 N

$F_{nE2}$ : Fuerza normal del engranaje 2 =  $F_{tE2} * \tan(\rho) = 2909.3$  N

$A_{1x}$ : Componente en x del apoyo  $A_1$

$B_{1x}$ : Componente en x del apoyo  $B_1$

$\rho$ : ángulo de presión =  $20^\circ$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_{1y} + B_{1y} + F_{tE2} - F_{tE1} \sin(30) - F_{nE1} \sin(60) = 0 \quad (A4.2)$$

Donde:

$F_{nE1}$ : Fuerza normal del engranaje 1 =  $F_{tE1} * \tan(\rho) = 5355.8$  N

$F_{tE2}$ : Fuerza tangencial del engranaje 2 = 7993.33 N

$A_{1y}$ : Componente en y del apoyo  $A_1$

$B_{1y}$ : Componente en y del apoyo  $B_1$

$$\sum M_{yA} = 0$$

$$(F_{tE1} \cos(30) + F_{nE1} \cos(60)) * 70 + F_{nE2} * 210 - B_{1x} * 270 = 0$$

$$B_{1x} = 2967.8 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{1x}$  en la ecuación (A4.1) obtenemos:

$$A_{1x} = 2660.7 \text{ N}$$

$$\sum M_{xA} = 0$$

$$F_{tE2} * 210 - (F_{tE1} \sin(30) - F_{nE1} \sin(60)) * 70 + B_{1y} * 270 = 0$$

$$B_{1y} = -2218.8 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{1y}$  en la ecuación (A4.2) obtenemos:

$$A_{1y} = 9647.1 \text{ N}$$

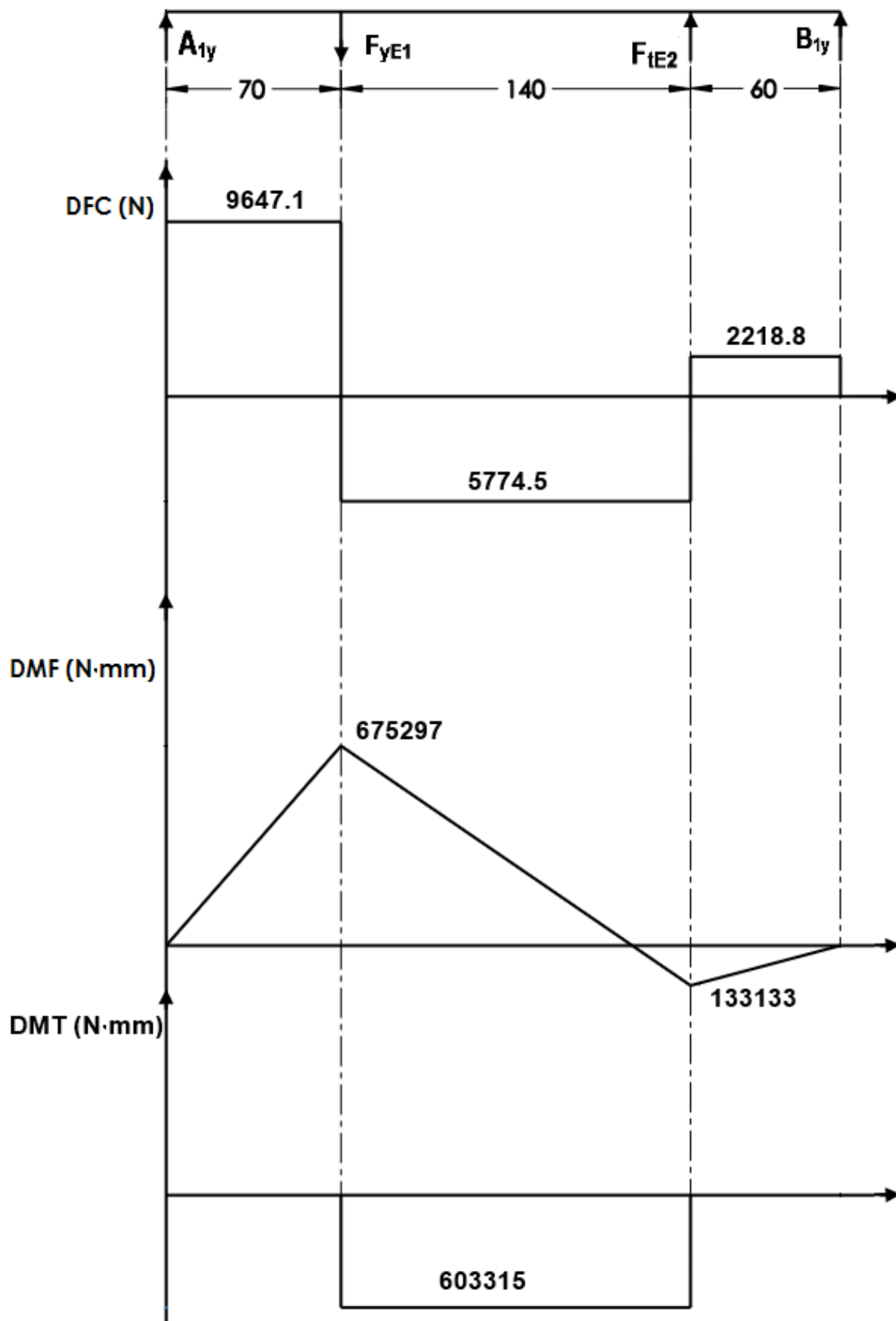


Figura A4.3: Diagrama de fuerza cortante, momento flector en Y y momento torsor del eje 1. Fuente: Elaboración propia.

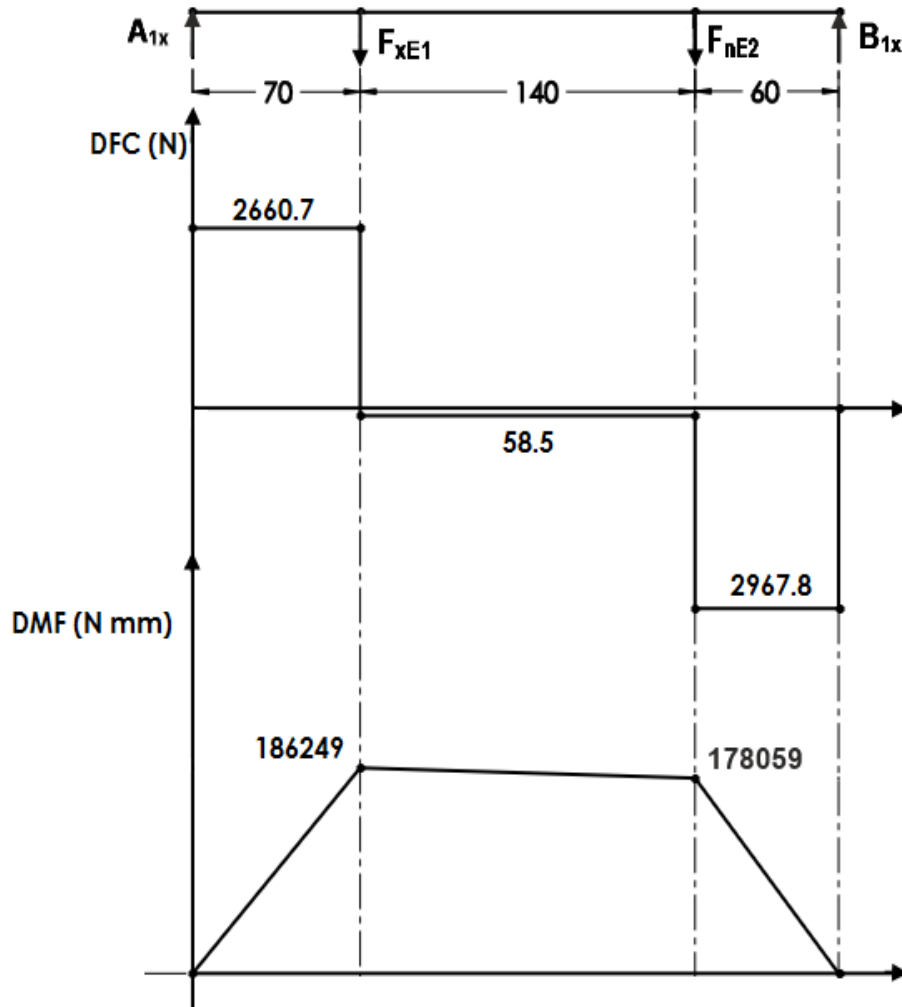


Figura A4.4: Diagrama de fuerza cortante y momento flector en X del eje 1. Fuente: Elaboración propia.

### Cálculo de los esfuerzos

Como se puede observar en la figura A4.3 y A4.4, el mayor esfuerzo se produce en la ubicación del engranaje 1 (E1).

### Análisis estático

El material seleccionado para los ejes es AISI 3215, comúnmente usado para este tipo de elementos de máquinas. El esfuerzo de fluencia ( $\sigma_y$ ) de este material es de 700 MPa y el esfuerzo último a tracción ( $\sigma_B$ ) es de 1200 MPa.

Los esfuerzos para una sección circular se hallan de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{32 M_f}{\pi d^3} \quad (A4.3)$$

$$\tau = \frac{16 M_t}{\pi d^3} \quad (A4.4)$$

Donde:

$M_f$ : Momento flector.

$M_t$ : Momento torsor.

$d$ : diámetro.

En la ubicación más crítica mencionada, el momento flector resultante y momento torsor que actúan son:

$$M_f = \sqrt{675297^2 + 186249^3} = 700510.3 \text{ N mm}$$

$$M_t = 603315 \text{ N mm}$$

Se propuso usar un diámetro de 35 mm, con este valor los esfuerzos son:

$$\sigma = 166.42 \text{ MPa}$$

$$\tau = 71.65 \text{ MPa}$$

Para determinar el esfuerzo equivalente y posteriormente el factor de seguridad, se usó la teoría de falla de Tresca, quien plantea las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_f^2 + 3 \tau^2} \quad (A4.5)$$

$$\sigma_{eq} < \frac{\sigma_Y}{FS} \quad (A4.6)$$

Reemplazando en la ecuación (A4.3) y (A4.4), obtenemos el  $\sigma_{eq}$  y el F.S.

$$\sigma_{eq} = 207.62 \text{ MPa}$$

$$FS = 3.37$$

Se decidió trabajar con este F.S., ya que el diámetro es comercial.

## Análisis por fatiga

Para el cálculo de los esfuerzos alternantes equivalentes y esfuerzos medios equivalente de los ejes aplicaremos la misma metodología empleada para el cálculo de los engranajes, usando las ecuaciones (A2.8), (A2.9), (A2.10), (A2.11) y (A2.12).

Para este cálculo de ejes no se despreció el esfuerzo cortante generado por el momento torsor el cual se obtiene de la siguiente manera:

$$\tau_{\tau a} = \tau_{\tau m} = \frac{\tau_{\tau s} + \tau_{\tau i}}{2} = \frac{\tau_{\tau s}}{2}$$

De la misma manera que se calculo  $\sigma'_{fa}$  en el cálculo de engranajes (ver Anexo 2), calcularemos  $\tau'_{\tau a}$  para el eje.

$$\tau'_{\tau a} = \frac{\beta_{flexión}}{C_s C_t C_{temp} C_{carga} C_c} \tau_{\tau a}$$

Se consideraron los siguientes coeficientes:

Coeficiente	Valor	Justificación
$\beta_{flexión}$	2.2	Por la presencia de un canal chavetero
$\beta_{torsión}$	1.8	Por la presencia de un canal chavetero
$C_s$	0.9	Se considera una superficie rectificada
$C_t$	1	El fabricante brinda la resistencia para distintos tamaños
$C_{temp}$	1.01	Se espera trabajar a 50 °C como máximo
$C_{carga}$	1	Solo hay esfuerzo debido a la torsión y flexión
$C_c$	0.814	Repetibilidad del 99%

Tabla A4.1: Coeficientes para el cálculo de esfuerzos por fatiga del eje 1.

Los resultados obtenidos fueron:

Esfuerzo	Valor
$\sigma_{m\ eq}$	102.03 MPa
$\sigma'_{a\ eq}$	286.07 MPa
FS	2.03

Tabla A4.2: Resultados obtenidos para el eje 1.

### Cálculo del eje 2

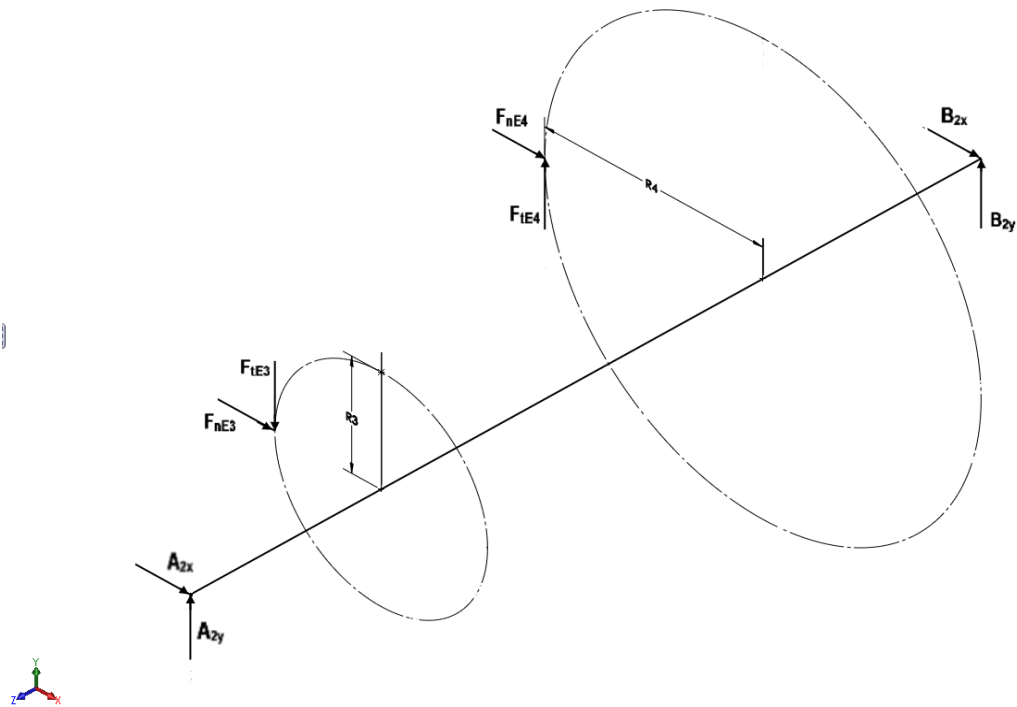


Figura A4.5: Vista isométrica del eje 2 y la cargas presentes. Los valores de R3 y R4 corresponden a los radios de los engranajes E3 y E4 calculados en el Anexo A. Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan los cálculos para hallar la fuerza cortante, momento flector y momento torsor del eje 2.

$$\sum F_x = 0$$

$$A_{2x} + B_{2x} + F_{nE3} + F_{nE4} = 0 \quad (A4.7)$$

Donde:

$F_{nE3}$ : Fuerza normal del engranaje 3 =  $F_{tE3} * \tan(\rho) = 2909.3 \text{ N}$

$F_{nE4}$ : Fuerza normal del engranaje 4 =  $F_{tE4} * \tan(\rho) = 1400.8 \text{ N}$

$A_{2x}$ : Componente en x del apoyo  $A_2$

$B_{2x}$ : Componente en x del apoyo  $B_2$

$\rho$ : ángulo de presión =  $20^\circ$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_{1y} + B_{1y} + F_{tE4} - F_{tE3} = 0 \quad (A4.8)$$

Donde:

$F_{tE3}$ : Fuerza tangencial del engranaje 3 =  $7993.3 \text{ N}$

$F_{tE4}$ : Fuerza tangencial del engranaje 4 =  $3848.6 \text{ N}$

$A_{2y}$ : Componente en y del apoyo  $A_2$

$B_{2y}$ : Componente en y del apoyo  $B_2$

$$\sum M_{yA} = 0$$

$$F_{nE3} * 60 + F_{nE4} * 240 + B_{2x} * 290 = 0$$

$$B_{2x} = -1761.2 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{2x}$  en (A4.7) obtenemos:

$$A_{2x} = -2548.9 \text{ N}$$

$$\sum M_{xA} = 0$$

$$F_{tE4} * 240 - F_{tE3} * 60 + B_{2y} * 290 = 0$$

$$B_{2y} = -1531.3 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{2y}$  en (A4.8) obtenemos:

$$A_{1y} = 5675.9 \text{ N}$$

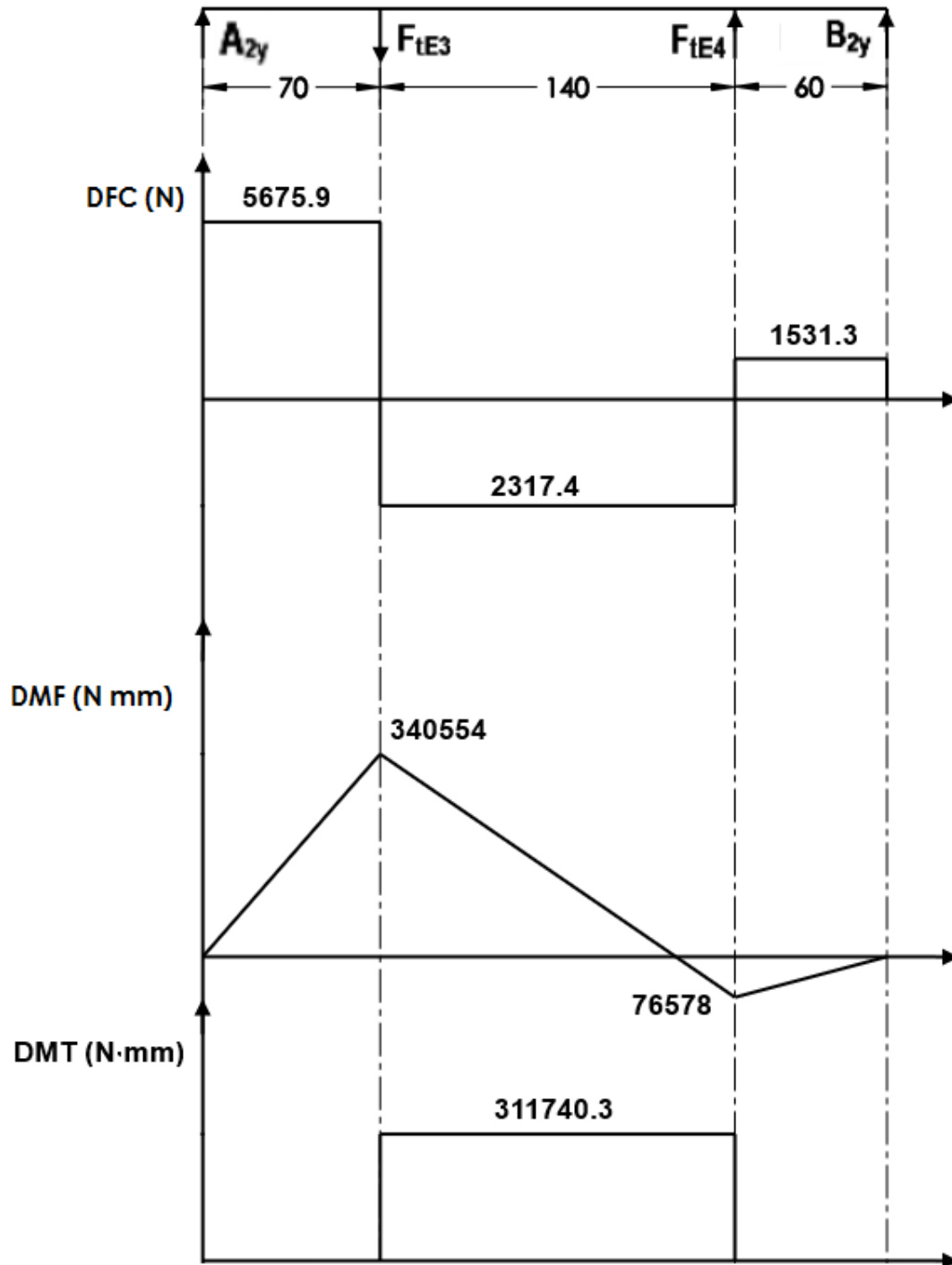


Figura A4.6: Diagrama de fuerza cortante, momento flector en Y y momento torsor del eje 2.  
Fuente: Elaboración propia.



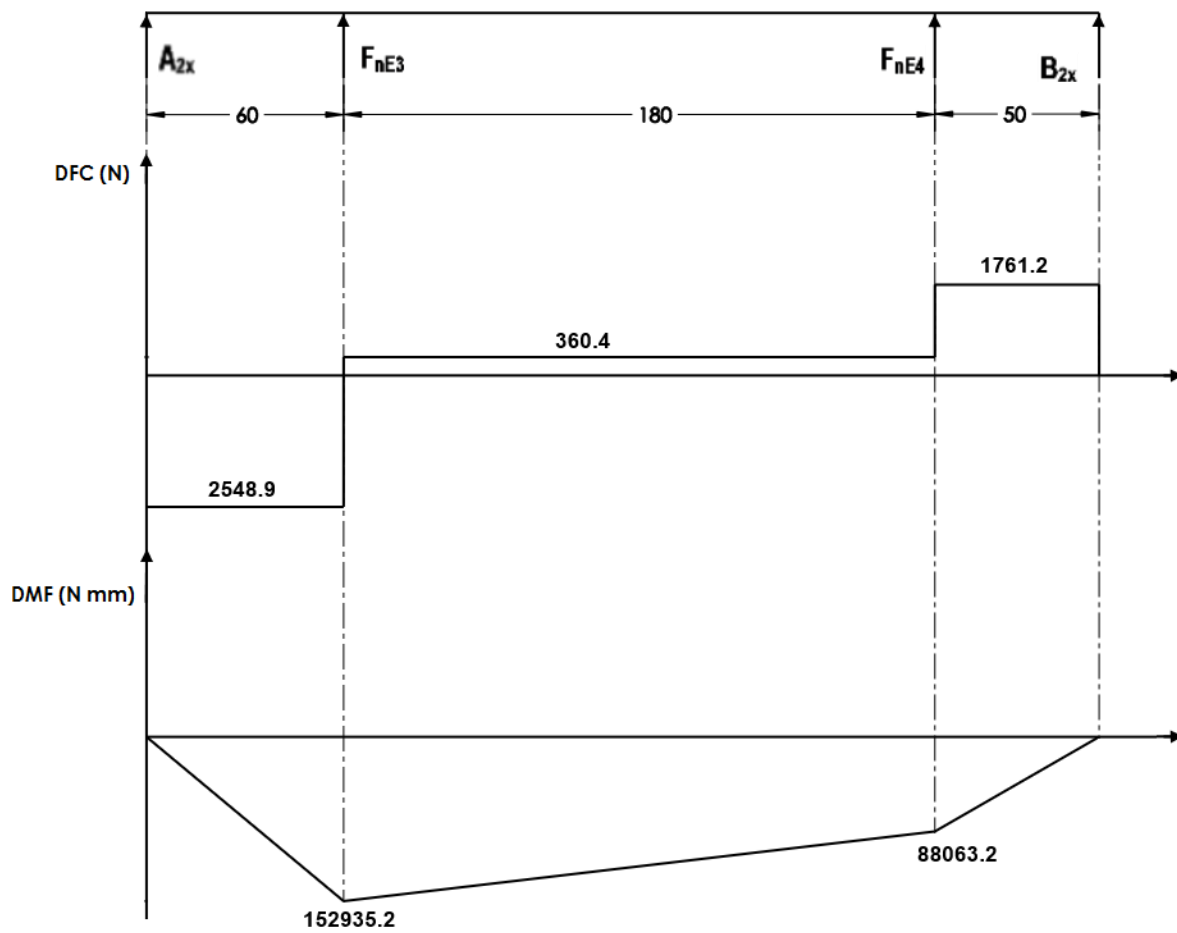


Figura A4.7: Diagrama de fuerza cortante y momento flector en X del eje 2. Fuente: Elaboración propia.

### Calculo de los esfuerzos

Como se puede observar en la figura A4.6 y A4.7, el mayor esfuerzo se produce en la ubicación del engranaje 3 (E3).

### Análisis estático

Se realizara el mismo procedimiento desarrollado para el eje 1.

En la ubicación más crítica mencionada, el momento flector resultante y momento torsor que actúan son:

$$M_f = \sqrt{340554^2 + 152935.2^2} = 373317.8 \text{ N mm}$$

$$M_t = 311740.3 \text{ N mm}$$

Se propuso usar un diámetro de 30mm. Reemplazando estos valores en las ecuaciones (A4.3) y (A4.4), los esfuerzos son:

$$\sigma = 140.8 \text{ MPa}$$

$$\tau = 58.8 \text{ MPa}$$

Usando la teoría de falla antes mencionada y reemplazando en las ecuaciones (A4.5) y (A4.6), el esfuerzo equivalente y el factor de seguridad son:

$$\sigma_{eq} = 173.8 \text{ MPa}$$

$$FS = 4.03$$

## Análisis por fatiga

Se realizó la misma metodología desarrollada para el eje 1 usando las ecuaciones A2.8, A2.9, A2.10, A2.11 y A2.12. Los coeficientes usados se muestran en la siguiente tabla:

Coeficiente	Valor	Justificación
$\beta_{\text{flexión}}$	2.2	Por la presencia de un canal chavetero
$\beta_{\text{torsión}}$	1.8	Por la presencia de un canal chavetero
$C_s$	0.9	Se considera una superficie rectificada
$C_t$	1	El fabricante brinda la resistencia para distintos tamaños
$C_{\text{temp}}$	1.01	Se espera trabajar a 50 °C como máximo
$C_{\text{carga}}$	1	Solo hay esfuerzo debido a la torsión y flexión
$C_c$	0.814	Repetibilidad del 99%

Tabla A4.3: Coeficientes para el cálculo de esfuerzos por fatiga del eje 2.

Los resultados obtenidos fueron:

Esfuerzo	Valor
$\sigma_{m\ eq}$	86.72 MPa
$\sigma'_{a\ eq}$	242.71 MPa
FS	2.39

Tabla A4.4: Resultados obtenidos para el eje 2.

### Cálculo del eje 3

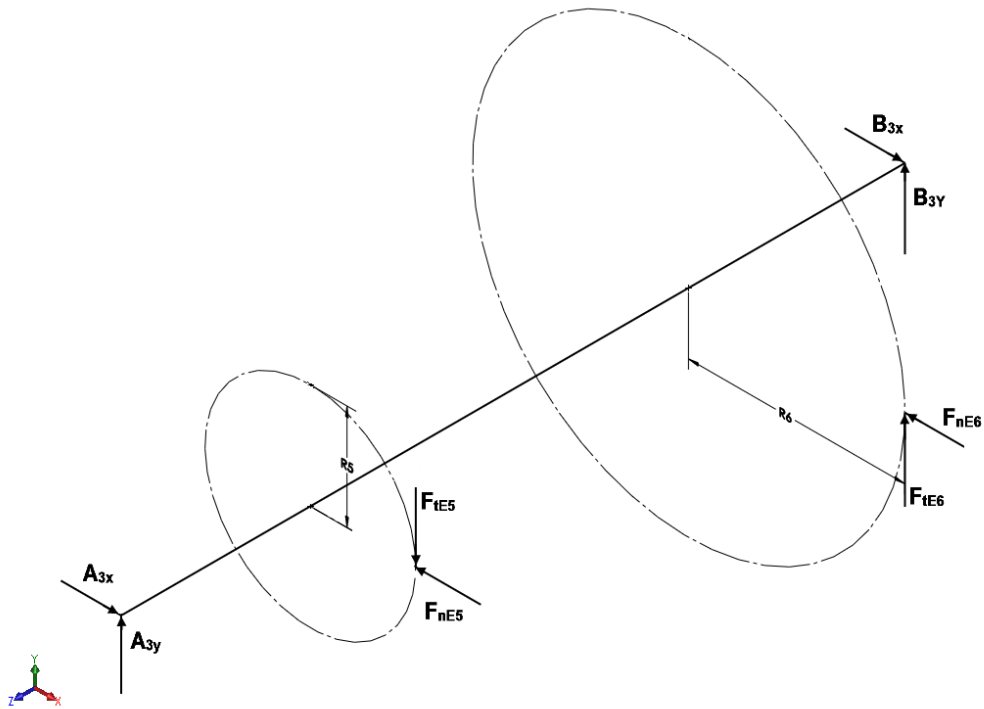


Figura A4.8: Vista isométrica del eje 3 y la cargas presentes. Los valores de R5 y R6 corresponden a los radios de los engranajes E5 y E6 calculados en el Anexo 2. Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan los cálculos para hallar la fuerza cortante, momento flector y momento torsor del eje 3.

$$\sum F_x = 0$$

$$A_{3x} + B_{3x} - F_{nE5} + F_{nE6} = 0 \quad (A4.9)$$

Donde:

$F_{nE5}$ : Fuerza normal del engranaje 5 =  $F_{tE5} \cdot \tan(\rho) = 1400.8 \text{ N}$

$F_{nE6}$ : Fuerza normal del engranaje 6 =  $F_{tE6} \cdot \tan(\rho) = 700.4 \text{ N}$

$A_{3x}$ : Componente en x del apoyo  $A_3$

$B_{3x}$ : Componente en x del apoyo  $B_3$

$\rho$ : ángulo de presión =  $20^\circ$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_{1y} + B_{1y} + F_{tE6} - F_{tE5} = 0 \quad (A4.10)$$

Donde:

$F_{tE5}$ : Fuerza tangencial del engranaje 5 = 3848.6 N

$F_{tE6}$ : Fuerza tangencial del engranaje 6 = 1924.3 N

$A_{3y}$ : Componente en y del apoyo  $A_3$

$B_{3y}$ : Componente en y del apoyo  $B_3$

$$\sum M_{yA} = 0$$

$$F_{nE5} * 50 + F_{nE6} * 240 - B_{3x} * 300 = 0$$

$$B_{2x} = 793.8 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{3x}$  en (A4.9) obtenemos:

$$A_{2x} = 1307.4 \text{ N}$$

$$\sum M_{xA} = 0$$

$$F_{tE6} * 240 - F_{tE5} * 50 + B_{3y} * 290 = 0$$

$$B_{3y} = -898 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{3y}$  en (A4.10) obtenemos:

$$A_{3y} = 1307.4 \text{ N}$$

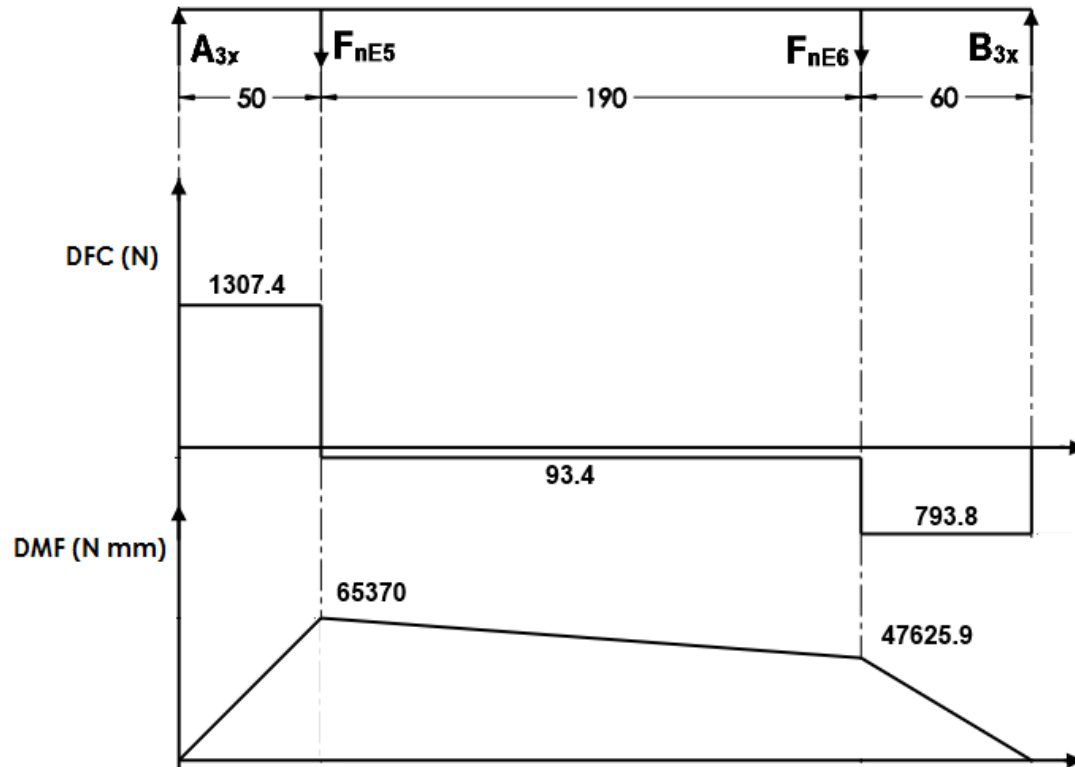


Figura A4.9: Diagrama de fuerza cortante y momento flector en X del eje 3. Fuente: Elaboración propia.

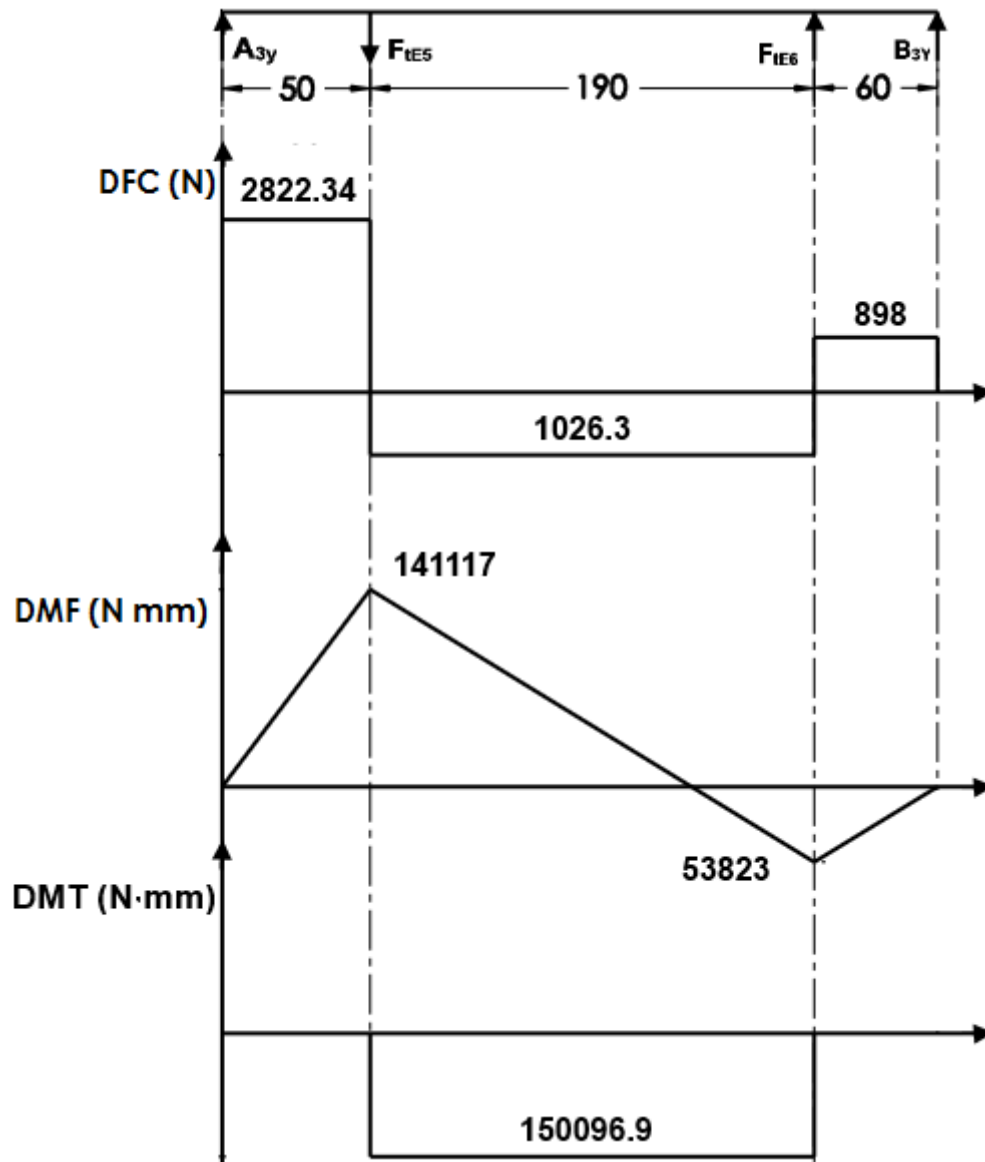


Figura A4.10: Diagrama de fuerza cortante, momento flector en Y y momento torsor del eje 3.  
Fuente: Elaboración propia.

### Calculo de los esfuerzos

Como se puede observar en la figura A4.9 y A4.10, el mayor esfuerzo se produce en la ubicación del engranaje 5 (E5).

### Análisis estático

Se realizara el mismo procedimiento desarrollado para el eje 1. En la ubicación más crítica mencionada, el momento flector resultante y momento torsor que actúan son:

$$M_f = \sqrt{141117^2 + 65370^2} = 155522.5 \text{ N mm}$$

$$M_t = 150096.9 \text{ N mm}$$

Se propuso usar un diámetro de 25 mm. Reemplazando estos valores en las ecuaciones (A4.3) y (A4.4), los esfuerzos son:

$$\sigma = 101.4 \text{ MPa}$$

$$\tau = 48.9 \text{ MPa}$$

Usando la teoría de falla antes mencionada y reemplazando en las ecuaciones (A4.5) y (A4.6), el esfuerzo equivalente y el factor de seguridad son:

$$\sigma_{eq} = 132.1 \text{ MPa}$$

$$FS = 5.3$$

## Análisis por fatiga

Se realizó la misma metodología desarrollada para el eje 1 usando las ecuaciones A2.8, A2.9, A2.10, A2.11 y A2.12. Los coeficientes usados se muestran en la siguiente tabla:

Se consideraron los siguientes coeficientes:

Coeficiente	Valor	Justificación
$\beta_{\text{flexión}}$	2.2	Por la presencia de un canal chavetero
$\beta_{\text{torsión}}$	1.8	Por la presencia de un canal chavetero.
$C_s$	0.9	Se considera una superficie rectificada
$C_t$	1	El fabricante brinda la resistencia para distintos tamaños
$C_{\text{temp}}$	1.01	Se espera trabajar a 50 °C como máximo
$C_{\text{carga}}$	1	Solo hay esfuerzo debido a la torsión y flexión
$C_c$	0.814	Repetibilidad del 99%

Tabla A4.5: Coeficientes para el cálculo de esfuerzos por fatiga del eje 3.

Los resultados obtenidos fueron:

Esfuerzo	Valor
$\sigma_{m \text{ eq}}$	66.1 MPa
$\sigma'_{a \text{ eq}}$	182.6 MPa
FS	3.17

Tabla A4.6: Resultados obtenidos para el eje 3.

## Cálculo del eje 4

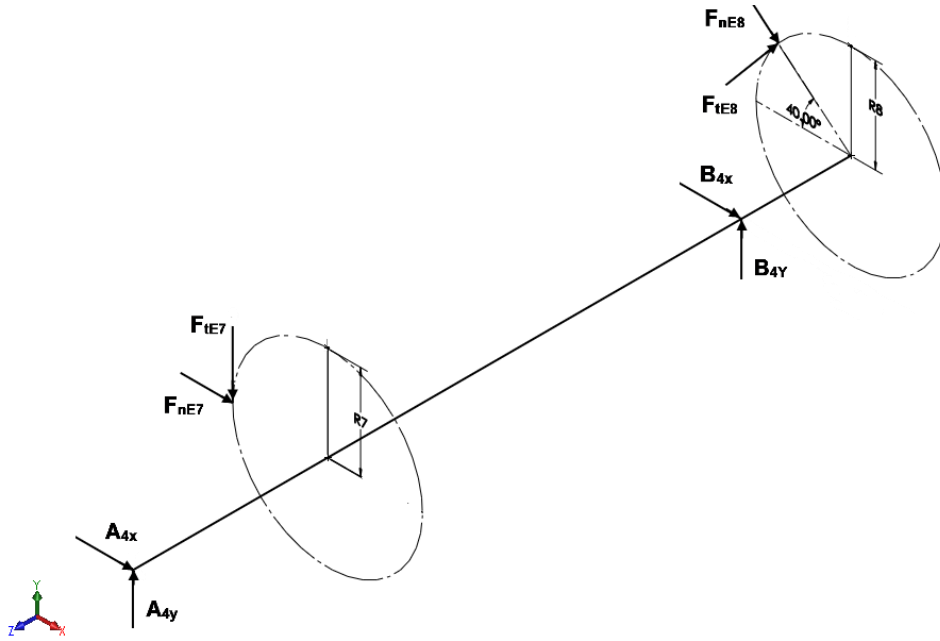


Figura A4.11: Vista isométrica del eje 4 y la cargas presentes. Los valores de R7 y R8 corresponden a los radios de los engranajes E7 y E8 calculados en el Anexo 2. Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan los cálculos para hallar la fuerza cortante, momento flector y momento torsor del eje 4.

$$\sum F_x = 0$$

$$A_{4x} + B_{4x} + F_{nE7} + F_{nE8} * \cos(40) + F_{tE8} * \sin(40) = 0 \quad (A4.11)$$

Donde:

$F_{tE8}$ : Fuerza tangencial del engranaje 8 = 1924.4 N

$F_{nE7}$ : Fuerza normal del engranaje 7 =  $F_{tE7} * \tan(\rho) = 700.4$  N

$F_{nE8}$ : Fuerza normal del engranaje 6 =  $F_{tE6} * \tan(\rho) = 700.4$  N

$A_{4x}$ : Componente en x del apoyo  $A_4$

$B_{4x}$ : Componente en x del apoyo  $B_4$

$\rho$ : ángulo de presión =  $20^\circ$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_{4y} + B_{4y} - F_{tE7} - F_{nE8} * \sin(40) + F_{tE8} * \cos(40) = 0 \quad (A4.12)$$

Donde:

$F_{tE7}$ : Fuerza tangencial del engranaje 7 = 1924.4 N

$A_{3y}$ : Componente en y del apoyo  $A_3$

$B_{3y}$ : Componente en y del apoyo  $B_3$

$$\sum M_{yA} = 0$$

$$-F_{nE7} * 80 - B_{4x} * 250 - (F_{nE8} * \cos(40) + F_{tE8} * \sin(40)) * 295 = 0$$

$$B_{4x} = -2316.8 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{4x}$  en (A4.11) obtenemos:

$$A_{4x} = -157.1 \text{ N}$$

$$\sum M_{xA} = 0$$

$$B_{4y} * 250 - F_{tE7} * 80 + (F_{tE8} * \cos(40) - F_{nE8} * \sin(40)) * 295 = 0$$

$$B_{4y} = -595.5 \text{ N}$$

Reemplazando el valor de  $B_{4y}$  en (A4.12) obtenemos:

$$A_{4y} = 1492.8 \text{ N}$$

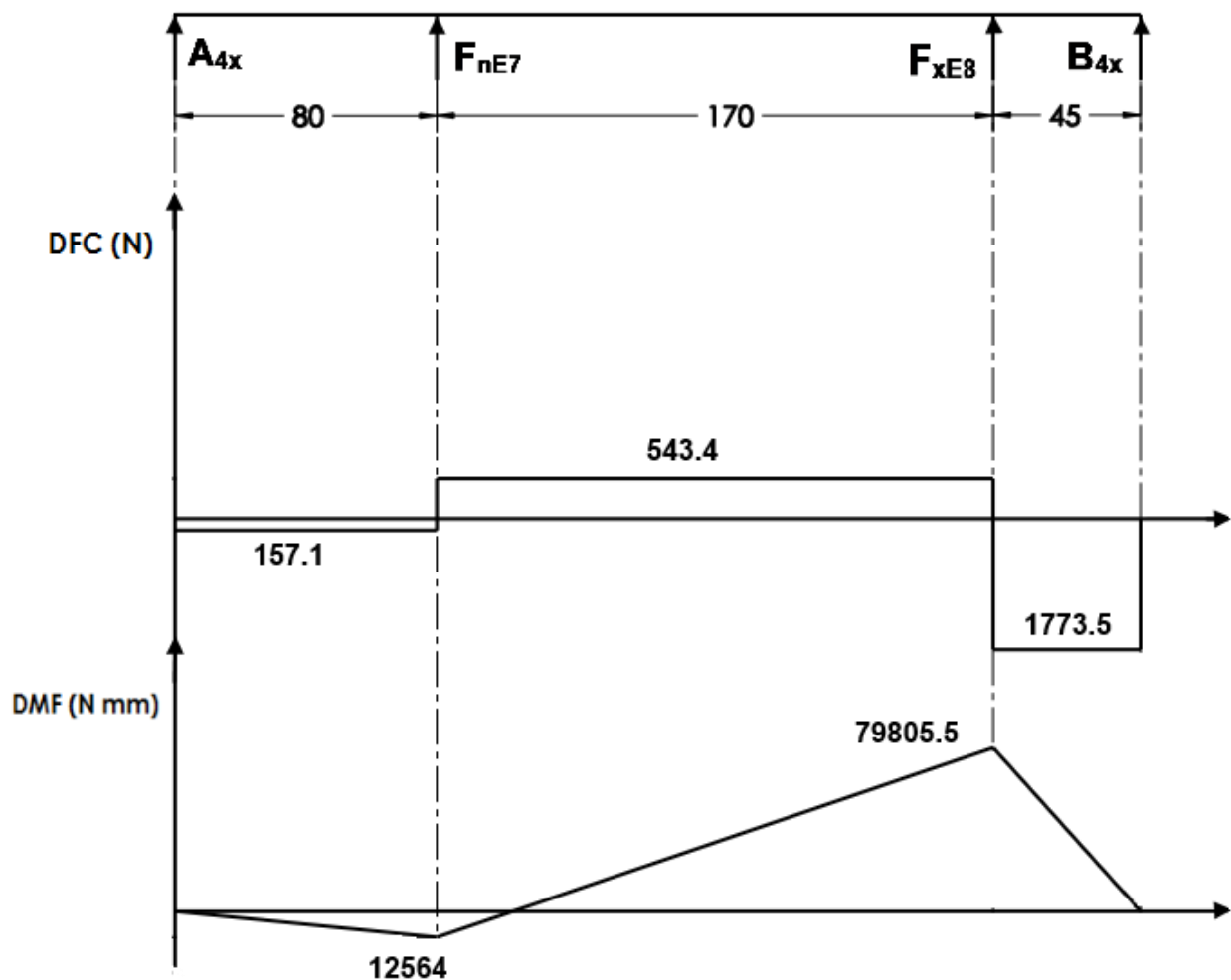


Figura A4.12: Diagrama de fuerza cortante y momento flector en X del eje 4. Fuente: Elaboración propia.



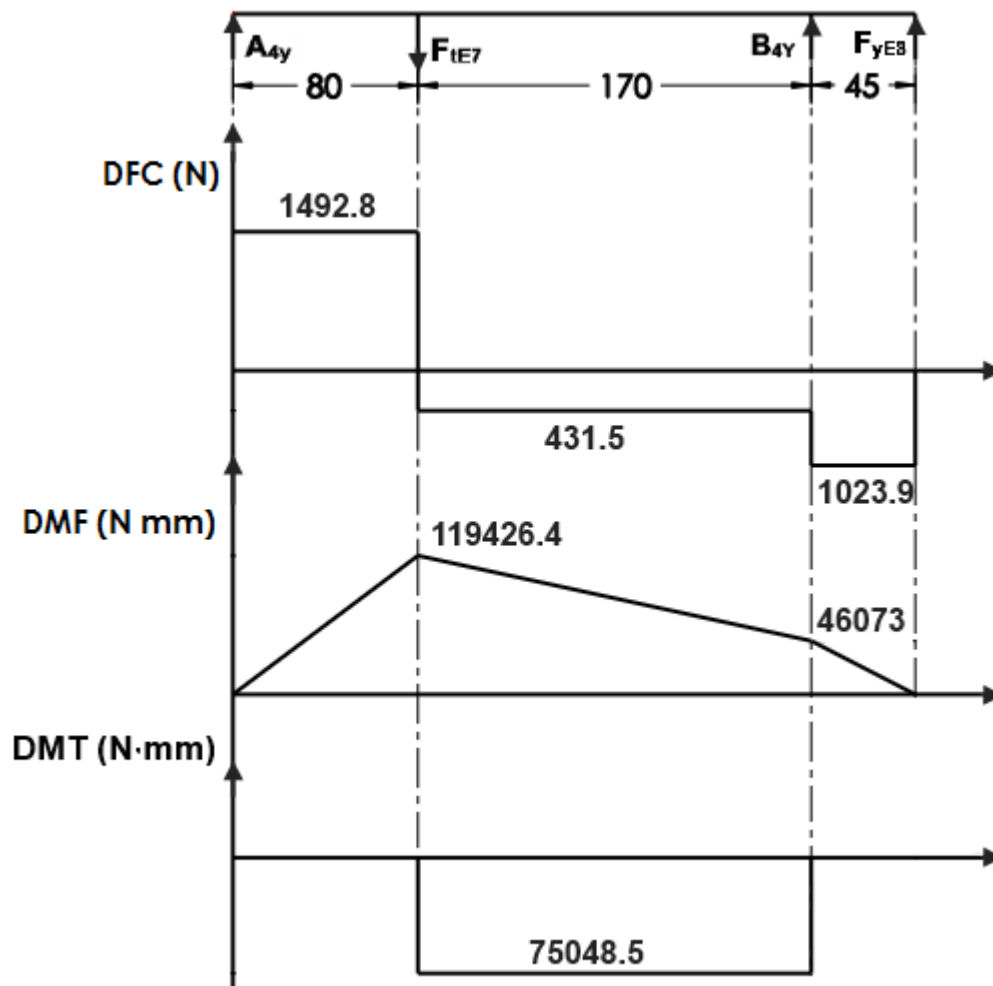


Figura A4.13: Diagrama de fuerza cortante, momento flector en X y momento torsor del eje 4. Fuente: Elaboración propia.

### Calculo de los esfuerzos

El momento flector resultante en la ubicación del engranaje 7 (E7) es:

$$M_{fE5} = \sqrt{119426^2 + 12564^2} = 120085.1 \text{ N mm}$$

Además, el momento flector en la ubicación del apoyo B es:

$$M_{fB} = \sqrt{46073^2 + 79805.5^2} = 92150.1 \text{ N mm}$$

Como se puede notar, el mayor esfuerzo se produce en la ubicación del engranaje 7 (E7).

### Análisis estático

Se realizara el mismo procedimiento desarrollado para el eje 1.

En la ubicación más crítica mencionada, el momento flector resultante y momento torsor que actúan son:

$$M_f = 120085.1 \text{ N mm}$$

$$M_t = 75048.5 \text{ N mm}$$

Se propuso usar un diámetro de 25mm. Reemplazando estos valores en las ecuaciones (A4.3) y (C.4), los esfuerzos son:

$$\sigma = 78.3 \text{ MPa}$$

$$\tau = 24.5 \text{ MPa}$$

Usando la teoría de falla antes mencionada y reemplazando en las ecuaciones (A4.5) y (A4.6), el esfuerzo equivalente y el factor de seguridad son:

$$\sigma_{eq} = 89.1 \text{ MPa}$$

$$FS = 7.9$$

### Análisis por fatiga

Se realizó la misma metodología desarrollada para el eje 1 usando las ecuaciones A.9, A.10, A.11 y A.12. Los coeficientes usados se muestran en la siguiente tabla:

Se consideraron los siguientes coeficientes:

Coeficiente	Valor	Justificación
$\beta_{\text{flexión}}$	2.2	Por la presencia de un canal chavetero
$\beta_{\text{torsión}}$	1.8	Por la presencia de un canal chavetero
$C_s$	0.9	Se considera una superficie rectificada
$C_t$	1	El fabricante brinda la resistencia para distintos tamaños
$C_{\text{temp}}$	1.01	Se espera trabajar a 50 °C como máximo
$C_{\text{carga}}$	1	Solo hay esfuerzo debido a la torsión y flexión
$C_c$	0.814	Repetibilidad del 99%

Tabla A4.7: Coeficientes para el cálculo de esfuerzos por fatiga del eje 3.

Los resultados obtenidos fueron:

Esfuerzo	Valor
$\sigma_{m \text{ eq}}$	66.1 MPa
$\sigma'_{a \text{ eq}}$	182.6 MPa
FS	4.02

Tabla A4.8: Resultados obtenidos para el eje 4.